

**Topologia**  
**Lista 5** (zwartość i spójność)

**Zad 1.** Pokazać, że podzbiór zwarty przestrzeni metrycznej  $X$  jest zbiorem domkniętym.

**Zad 2.** Pokazać, że domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zbiorem zwartym.

**Zad 3.** Niech  $K \subset Y \subset X$ . Pokazać, że zbiór  $K$  jest zwarty w  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwarty w  $Y$ .

**Zad 4.** Dowieść, że przestrzeń metryczna  $(X, d)$  jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia *warunek Riesz*, to jest gdy: dla dowolnej rodziny  $\{F_t\}_{t \in T}$  zbiorów domkniętych

$$\bigcap_{t \in T} F_t = \emptyset \implies \exists \{t_1, \dots, t_n\} \subset T \quad F_{t_1} \cap \dots \cap F_{t_n} = \emptyset.$$

**Zad 5.** Pokazać, że przestrzeń  $X$  z metryką dyskretną jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $X$  jest skończony.

**Zad 6.** Pokazać, że następujące zbiory nie są zwarte:

- a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq y - x \leq \frac{1}{2}\}$ ,  $B = [0, 1] \times (0, 1]$  na płaszczyźnie euklidesowej  $\mathbb{R}^2$ ,
- b)  $A = [1, 2] \times \{1\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$  na płaszczyźnie z metryką studnia,
- c)  $A = [1, 2] \times \{1\}$ ,  $B = \mathbb{R} \times \{0\}$  na płaszczyźnie z metryką rzeka.

**Zad 7.** Pokazać, że dla przestrzeni topologicznej  $X$  następujące warunki są równoważne:

- a) przestrzeń  $X$  nie jest sumą dwu rozłącznych, niepustych zbiorów otwartych,
- b) jedynymi podzbiorem domknięto-otwartymi w  $X$  są  $\emptyset$  oraz  $X$ ,
- c) jeśli  $X = X_1 \cup X_2$  i zbiory  $X_1, X_2$  są rozgraniczone, to znaczy

$$\overline{X_1} \cap X_2 = \emptyset \quad \wedge \quad X_1 \cap \overline{X_2} = \emptyset,$$

to jeden z nich jest pusty,

- d) każde przekształcenie ciągłe  $f : X \rightarrow D$  przestrzeni  $X$  w przestrzeń dyskretną  $D$  posiadającą co najmniej dwa elementy, jest stałe.

**Zad 8.** Które z podanych przestrzeni są spójne:

- a) przestrzeń dyskretna,
- b) przestrzeń antydyskretna,
- c) przestrzeń  $(\mathbb{N}, \tau)$ , gdzie  $\tau = \{A \subset \mathbb{N} : \text{zbiór } \mathbb{N} \setminus A \text{ jest skończony lub } A = \emptyset\}$ .

**Zad 9.** Pokazać, że podzbiór  $A$  prostej euklidesowej  $\mathbb{R}$  jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych liczb  $a, b \in A$  takich, że  $a < b$  każda liczba  $c \in (a, b)$  należy do zbioru  $A$ .

**Zad 10.** Które ze zbiorów w zadaniu 6 są spójne.

**Zad 11.** Wykazać, że przy odwzorowaniu ciągłym obraz zbioru spójnego jest zbiorem spójnym, a zbioru zwartego zbiorem zwartym.

**Zad 12.** Pokazać, że każdy zbiór na płaszczyźnie zwarty w metryce studnia lub rzeka jest zwarty w metryce euklidesowej, ale nie na odwrót.

**Zad 13.** Dowieść, że w przestrzeni euklidesowej kula otwarta nie jest homeomorficzna z kulą domkniętą.

**Zad 14.** Czy następujące podprzestrzenie płaszczyzny euklidesowej  $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 - e^{-t}) \cos t, y = (1 - e^{-t}) \sin t, t \in [0, \infty), \text{ lub } x^2 + y^2 = 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 + e^t) \cos t, y = (1 + e^t) \sin t, t \in [0, \infty), \text{ lub } x^2 + y^2 = 1\}$$

są homeomorficzne?